Mécanique, enseignée via l'Histoire des Sciences/plan de phase

ébauche

il faut que je rapatrie non le fond , mais la forme !

Leçon : diagramme des espaces; plan de phase

Nous suivons la démarche de Poincaré : il s'agit ici de faire comprendre , à travers des exemples sur une droite x'Ox, que la donnée de [x0,v0] et de la règle donnant [x(t+dt);v(t+dt)]= f([x(t);v(t)],t) est l'algorithme fondamental de la dynamique: alors appliquant la méthode point par point de Picard, cette équation différentielle a une solution unique, sous réserve de régularité sur la fonction f.

Mouvement de Torricelli(1608-1647)

C'est historiquement le premier cas de mouvement périodique, pouvant théoriquement constituer une HORLOGE. Mais Torricelli n'en considérait pas la réalisation pratique: seul le phénomène mathématique l'intéressait (de Motu, 1641).

Il s'agit du cas: $v^2(z) = Vo^2-2.g.|z|$.

Prendre le cas où au temps initial, le mobile M se trouve en z=0, avec la vitesse +V0 : il se dirigera vers le haut jusqu'à ce que z = H1 = sqrt(Vo^2/2a). Ce parcours aura pris le temps t1 = V0/2g = sqrt(2H1/g).

Mais le mobile ne s'arrête pas là, comme l'a bien analysé Galilée. L'accélération restant négative, le mobile repart dans l'autre sens, avec la même vitesse aux mêmes points: donc c'est juste le même mouvement mais en sens inverse , et le mobile se retrouve à l'origine au temps 2t1, avec la vitesse -Vo. Il refait ainsi vers le bas exactement ce qui s'est passé vers le haut.Puis , il y a rebond élastique. Au total, le mouvement est périodique de période T = 4t1.

Expérimentalement, Galilée opérait sur deux plans inclinés formant un V; pour des raisons pratiques, le coin est alésé, et il vaut mieux prendre un boulet lourd qui roule sans glisser, avec une faible résistance au roulement. On peut "tricher", pour compenser le léger amortissement, en inclinant en cadence le chemin de roulement en V, de manière que S1 reste le même.

Si une balle rebondissait de manière élastique sur une raquette parfaite, on aurait exactement le même type d'horloge, à condition de contrôler le mouvement de la raquette (cf Problème de Fermi-Pasta-Ulam chaos contrôlé).

Ceci est un exemple très simple de mouvement dans un puits de potentiel

Mouvement de Kepler selon Leibniz(1689)

C'est un cas très célèbre de mouvement dans un puits de potentiel.

Dès 1689, Leibniz a su comprendre le mouvement radial d'un satellite en écrivant SON équation de l'énergie cinétique (à l'époque, on disait équation des forces vives) :

soit après intégration (on multiplie par v des 2 côtés et on intègre par rapport au temps) :

Il s'agit donc du mouvement dans un puits de potentiel U(r), si Eo est négative.

Les limites de ce puits s'appellent SP = r minimum = distance périgée et SA = r maximum = distance apogée, racines de l'équation U(r) = Eo.

Soit Lo²/2m (1/r)² - mgR² (1/r) - Eo = 0 , équation du second degré en 1/r :

Leibniz remarqua immédiatement que la demi-somme 1/2(1/SA +1/SP) , appelée moyenne harmonique et égale à 1/p est indépendante de Eo (règle 1 de Leibniz), et que la somme (SA +SP) = 2a était indépendante de Lo (règle 2 de Leibniz) : cf mouvement keplerien dans la WP.

L'équation réécrite avec 2a et p devient :

U(r)/m - Eo/m = Lo²/2m² (1/r² - 2/pr + 1/pa) = -1/2 (dr/dt)².

L'"astuce" usuelle dans ce genre de problème est de considérer la variable phi telle que r= a -c.cos ϕ , phi variant de 0 à Pi en passant du périgée à l'apogée. Alors l'intégration est beaucoup plus facile , et donne la célèbre équation de Kepler :

$\omega t = \phi - e \cdot \sin \phi$

En exprimant la fonction réciproque, on obtient phi(t) et donc r(t). (cf mouvement keplerien). Ici ω représente la pulsation du mouvement périodique dans le puits. On retrouve la troisième loi de Kepler :

$\omega^2 \cdot a^3 = gR^2$, indépendante de l'excentricité de la trajectoire elliptique décrite.

L'équation donnant l'angle polaire se trouve via l'intégration de la deuxième loi de Kepler :

$$C = \frac{\pi ab}{T} = r^2\dot{\theta}$$

Un nouveau concept: l'Action S(E) en joule-seconde

dans le cas de ces deux exemples, où l'orbite dans le plan de phase est périodique, chaque orbite (C(E)) est caractérisée par son énergie E qui reste constante(E = mgH1 dans le premier exemple , et E= -mgR^2/2a dans le cas de Kepler) et la période T(E) pour faire le tour de l'orbite dépend de cette orbite (C(E)). On peut aussi calculer la surface de l'aire enclose dans cette orbite $S(E) = \int_{C(E)} p(x) \cdot dx$. Cette quantité est fonction croissante de E , et l'on peut aussi bien indicer les orbites par S : on notera sans qu'il y ait ambiguité l'orbite par (C(S(E)))ou plus simplement (C(S)).

L'unité d'Action est le joule-seconde. On verra bien plus tard que toute la mécanique pourra se résumer en le "Principe de moindre Action", énoncé par Maupertuis et repris par Euler et Lagrange.

Exercice: T = dS(E)/dE

Voilà quelque chose qui peut surprendre au premier abord! Du point de vue homogénéité non ; du point de vue du signe non plus , puisque plus l'aire enclose est grande et plus E est grande , donc T est positive!

Dans le cas qui nous préoccupe l'orbite est symétrique p/-p , donc $S(E) = 2\int_{x=a}^{x=b} p(x) \cdot dx$ avec p= sqrt[2m(E-V(x))], dont la dérivée par rapport à E est p.dp/dE =m ; soit donc dp/dE = m/p = 1/v(x). Donc $dS(E)/dE = 2\int_{x=a}^{x=b} \frac{1}{v(x)} dx$. On reconnaît la période du diagramme des espaces aller-retour dans un puits de potentiel, soit T(E).

S(E) et la mécanique quantique

- En mécanique quantique, on montre qu'aucune orbite de l'espace des phases ne peut se réduire à un point. Il y a une surface minimale, disons So =1/2 . h , h étant la constante de Planck. De ce fait, il y aura toujours une énergie minimale à ce niveau fondamental Eo ; ensuite il est habituel de graduer les aires de niveau S par nombre entier de h : S(n) = So + n.h. A la limite des grandes valeurs de n , on aura donc dE/dn = h/T(E) , ce qui est une des règles de correspondance entre mécanique classique et mécanique quantique.En particulier, on peut retenir, pour un oscillateur harmonique :

E(n) = (n+1/2) \hbar \cdot _omega_0

- Une autre raison de connaître n(E)= S(E)/h -So/h est que cela servira pour mémoriser facilement toutes les formules d'effet tunnel qui sont si importantes dans les applications (transistor , Microscope à effet tunnel , Ecrans plats de télévision à émission de champ, etc.)

Puits de Potentiel

Soit une courbe plane, située dans un plan vertical, en forme de cuvette. Un point matériel, de masse m, s'y meut, en glissant sans frottement. La conservation de l'énergie (c'est à dire le Principe de Torricelli, ici) donne, en prenant l'abscisse curviligne s(t) comme inconnue, l'équation du mouvement de ce point:

$$\dot{s}^2 + 2gh(s) = 2E/m := 2gH$$

qui s'appelle en mathématiques une équation différentielle de Leibniz , liée à l'équation différentielle de Newton du second ordre :

$$\ddot{s} + g\frac{dh}{ds} = 0 \cdot$$

De l'équation de Leibniz, on tire la vitesse v(s)= (+/-) sqrt(2g.[H-h(s)]).

Ce qui ramène à l'étude d'un diagramme horaire. Par exemple le cas simple (dit de Torricelli) de h(s)=|s| y est étudié.

Il arrive que l'on considère en physique une équation similaire : le mouvement d'un point matériel sur un axe x'Ox, sous l'action d'une force F(x) :

$$\ddot{x} = F/m := g(x)$$

(On appelle énergie potentielle V(x) est l'opposée de la primitive de F(x)). La conservation de l'énergie donne le même type d'équation de Leibniz:

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + V(x) = E_0$$

On dit alors que la particule est confinée dans un puits de potentiel, sur l'intervalle [a,b], a et b, racines contiguës de V(x)= Eo.

Sur cet intervalle , la particule exécutera un parcours périodique. Dans le plan de phase l'orbite sera périodique.

Cuvette symétrique

Soit l'origine O, au fond de la cuvette, sans restriction de généralité. Soit A le point d'abscisse s = a telle que h(A)= H.

Le mouvement se décrit qualitativement fort bien : la vitesse, maximale en O, ne cesse de décroître jusqu'à l'arrivée en A , au temps t1. Puis la particule rétrograde selon le même mouvement, et arrive en O, avec la vitesse opposée. Elle décrit alors l'autre bord de la cuvette,symétriquement, jusqu'au point symétrique A' et revient : le mouvement est périodique de période T = 4 t1. La méthode du diagramme horaire s'applique bien à ce cas qui peut donc s'expliquer et s'expérimenter sans de hautes mathématiques; ensuite, on peut ainsi tracer T(H).

Exemple: la cycloïde de Huygens (1659)

Huygens a trouvé quelle devait être la forme de la courbe pour que les oscillations soient isochrones : il fallait une cuvette qui se relevât plus vite que le cercle osculateur en O, de rayon R = 4a; il trouva que la cycloïde convenait. Alors $T(H) = cste = T_o = 2\pi\sqrt{R/g}$.

Le phénomène est tout à fait extraordinaire et splendide à regarder avec 2 cycloïdes identiques, parallèles, de R = 4 mètres, d'envergure 12.5m environ. Il est aussi très somptueux de procéder avec une troisième cycloïde, de R= 1m :

Une joue étant celle de la première cycloïde et l'autre celle de la troisième, le signal entendu est tic-tac-tic---toc---tic-tac-tic---toc, de période 3s environ , ceci quelle que soit l'envergure du mouvement, depuis quelque 10cm à quelques m: c'est assez extraordinaire à voir et entendre. Pour le montage, on aura soin de calculer la bonne longueur de la suspension bifilaire associée à la masse d'environ 1kg (détails techniques : penser à l'ajustement compte-tenu de l'effet pendule-double; sinon, il faut que la masse soit un disque monté sur d'excellents roulements à bille, dont l'axe sera serti dans une perle oblongue passée dans le bi-fil. De plus, il faut évidemment prendre du fil INEXTENSIBLE, sous une charge de 3kg. Enfin, il faut fixer solidement l'ensemble des joues pour éviter tout mouvement du support, en définitive assez lourd).

Taux d'Harmoniques

l'oscillation n'est pas en général harmonique. Il est usuel de poser:

$v^2(s) = N^2(s)(a^2 - s^2)$, et s=a.cosφ.Ainsi:

$t = \int_0^{\phi} \frac{du}{N[a(H)cos(u)]}$ et $T(H) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{N[a(H)cos(u)]}$

la fonction N(s) (en Hertz) étant généralement bornée:N1 < N < N2 , alors T2 < T(H) < T1.

- Le cas du pendule cycloïdal, vu dans le paragraphe précédent, est le plus facile, car N(s)= cste = No , donc T(H)= cste= To.
- Niveau plus élevé : Le cas du pendule simple , beaucoup plus difficile à analyser, est assez banal (on dit générique): si la cuvette présente un sommet arrondi concave, de hauteur Hmax, alors usuellement T(H) tend vers l'infini logarithmiquement quand H tend vers Hmax . Cet effet de ralentissement est appelé effet Ramsauer en physique nucléaire et a son correspondant en mécanique quantique. Il ressemble beaucoup à l'effet "soliton" , analysé dans l'article pendule simple:

soit la décomposition en série de Fourier de s(t):

$$s(t) = \Sigma b_n cos[\frac{2\pi nt}{T(H)}],$$

le taux d'harmoniques est pratiquement non décroissant jusqu'à une valeur $\aleph_0(H)$, puis s'écroule exponentiellement (donc très vite),dès que n > $\aleph_0(H)$: cela est essentiellement dû au caractère indéfiniment dérivable de s(t), c'est à dire à la "régularité" de la cuvette (cf Appell, mécanique, 1915).

- {{Note annexe : préciser, néanmoins, qu'il ne faudrait pas croire que l'anharmonicité soit toujours dû à ce mécanisme de ralentissement T(H); on connaît des cas de cuvettes (non-symétrique) où T(H) = cste= To , mais où l'anharmonicité devient très grande (la fonction périodique s(t) ressemble alors à de la houle très pointue; un exemple est V(x) = x -sqrt(x)),étudié en physique des plasmas)]].
- Enfin , il reste les cas où V(x) présente des singularités : le cas évident est celui d'une particule simplement bloquée entre deux murs reflecteurs: |x|<a . Alors on a évidemment la vitesse v(x) constante (au signe près), égale à sqrt(2E/m) et la période T(E) = 2 a/sqrt(2E/m). L'analyse de Fourier de s(t), qui est une fonction "triangle", donne des coefficients qui décroissent comme 1/n^2 et non pas exponentiellement. * D'autres types de puits de potentiel plus complexes existent [on pensera à (exp-x²).x^10.(x-a)².sin a²/(x-a)², où le nombre de racines de V'(x) augmente indéfiniment quand x tend vers a] : ces problèmes à plusieurs "fenêtres de sortie" donneront du

mal à être quantifiés en mécanique quantique : c'est le problème des barrières de potentiel double , voire triple en radio-activité. Fin de note annexe}}. === Quelques cas de cuvettes symétriques === * La cuvette soliton : $U(x) = -g^2/ch^2x$ On trouve : x(t) = argsh [sha.sin wt] ; avec sha = sqrt[$(g^2+E)/(-E)$] et la période T(E) = sqrt(2).Pi/ sqrt(-E) * la cuvette soliton modifiée : $U(x) = g^2/sin^2(x)$ On trouve : x(t) =arc cos (cosa .cos wt) avec cosa = sqrt($1-g^2/E$) et la période T(E) = sqrt(2)Pi/sqrt(E) * la cuvette de Jacobi : $U(x) = g^2/sn(x,k)$ On trouve la période T = 4/c K(k") avec $c^2= 2(E-g^2k^2)$ et k" $=k^2(E-g^2)/(E-g^2k^2)$, K(k) étant la fonction elliptique de première espèce. * la cuvette U(x) $=g^2.ch(2x)$: On trouve la période d'oscillation T = 4/a K(k) , avec a = sqrt($E+g^2$) et $k^2 = (E-g^2)/(E+g^2)$ * Remarque : par symétrie de Corinne, à ces cuvettes correspondent des barrière de potentiel , dont on peut évaluer en mécanique quantique l'effet tunnel ; c'est une des raisons de trouver un maximum d'exemples pour pouvoir interpréter nombre d'expériences. === **Détermination de h(s) grâce à l'observation de T(H) === Cela s'appelle résoudre un problème inverse. Landau et Lifschitz (mécanique, ed Mir) traite ce '''problème difficile'''. La notion mathématique qui s'applique bien ici est la notion de dérivée fractionnaire d'ordre 1/2, dite d'Abel. En fait c'est la fonction réciproque s(h) que l'on détermine (on a déjà vu dans le cas du pendule simple que h (et non s) est la bonne fonction inconnue, et alors on en déduit s(h(t))):la formule est : UNIQ-math-21-0dd9dafd6b92a6e6-QINU , dont on vérifie immédiatement l'homogénéité s= sqrt(gHo)To. Voir ci-dessous la démonstration. ==== Expérimentation ==== Ayant récupéré la courbe T(H) expérimentalement, il n'est pas trop difficile sur une calculette de programmer la courbe précedente s(h). C'est en principe ce qui termine un Travail Pratique expérimental. Le soin à apporter au tracé de T(H) n'est pas trop crucial, mais on a parfois des surprises! ==== quelques vérifications de cas connus ==== * la cuvette de Torricelli (cf diagramme horaire)avec T=4sqrt(2H/gsinα: s= h/sinα. * la cycloïde isochrone : s(h) telle que s^2(h) = 16 a h. * et aussi toutes les cuvettes de potentiel en V(x) = x^k , qui satisfont automatiquement au théorème du viriel, dont * le mouvement de Kepler : $T^2 =a^3 = 1/(-E)^3$, qui donne bien U ~ -1/|s|. * si on rajoute la barrière centrifuge, la cuvette est non symétrique, mais le raisonnement (adapté)donne bien , quel que soit le moment cinétique, le résultat, U ~ -1/r. * la cuvette h= Ho $tan^2(s/a)$ qui donne: gT^2 : = $4\pi^2.a^2/(Ho+H)$. ==== démonstration de la formule ==== La primitive fractionnaire 1/2 de la dérivée f'(x) est la dérivée 1/2 de f(x) (Théorème de réciprocité d'Abel); mais on peut opter pour une démonstration sans l'artillerie lourde (des dérivées fractionnaires!); voici celle empruntée à Landau (on a pris g=1) : * remarquer que UNIQ-math-22-0dd9dafd6b92a6e6-QINU (penser à HM^2= HA.HB, dans le triangle-rectangle AMB, inscrit dans le demi-cercle de diamètre AB : alors dx/HM = dφ ; d'où la réponse). * remarquer que T(H) s'écrit UNIQ-math-23-0dd9dafd6b92a6e6-QINU , et donc * UNIQ-math-24-0dd9dafd6b92a6e6-QINU , soit en intégrant sur la nouvelle variable H, de 0 à h, puis en intervertissant l'ordre d'intégration , d'abord en H , puis en z, l'obtention de la formule de réciprocité d'Abel. On pourra s'exercer avec les résultats précédents. == Cuvettes non symétriques == Il suffit de remarquer avec Newton que seule importe la section du puits de potentiel V(x) par la droite d'énergie E. On se ramène alors, " à la Cavalieri", à un puits de potentiel symétrique. Sont de ce type : * le potentiel (1-2)(dit de Newton radial ou de Leibniz),$-g^2/x + h^2/x^2$ * le potentiel harmonique: $g^2 x^2 +h^2/x^2$ * le potentiel de Lenard-Jones(6-12), * le potentiel interatomique dans une molécule diatomique, dit de Morse : $U(x) = g^2(2exp(x) + exp(-2x) -3)$ * le potentiel nucléaire : $U(x) = g^2/sh^2x -h^2/ch^2x$ * Remarque : U(x)=-g^2.x^4 amène la particule à l'infini en un temps fini ; il est donc assez irréaliste d'avoir des telles forces répulsives. ==== Remarque : supersymétrie ==== à compléter éventuellement Les potentiels précités ne sont pas trouvés au hasard ; ils résultent plus ou moins d'une sorte de factorisation, déjà remarquée par Schrodinger en 1940, et puis retrouvée par Witten sous le nom de supersymétrie N=2, pour des besoins bien différents. Évidemment, il se trouve que l'oscillateur harmonique radial et l'atome de Rutherford en font partie. ==== Formule de perturbation ==== Très souvent en physique, le puits de potentiel est légèrement perturbé par l'adjonction d'un paramètre que l'on peut contrôler (champ magnétique:effet Zeeman classique; champ électrique: effet Stark classique, etc.).Il est alors intéressant de savoir quelle est la nouvelle période T(H). La règle est la suivante : * soit le mouvement non perturbé s(t,H), de période T(H). Dans le plan de phase, l'orbite fermée, d'énergie H est décrite dans le sens rétrograde avec la période T(H) en enserrant une aire S(H),(en joule.seconde), appelée l'Action S(H). UN résultat classique de mécanique hamiltonienne est T(H) =

dS/dH. * Soit le nouveau potentiel V(x) + k V1(x), où k est un réel sans dimension très petit. * soit k.S1(H) la petite action (en joule.seconde)= T(H).[moyenne temporelle de k V1(x)]. * La variation de période T1(H) est: UNIQ-math-25-0dd9dafd6b92a6e6-QINU . * si on veut le deuxième ordre, en k², il faudra rajouter : UNIQ-math-26-0dd9dafd6b92a6e6-QINU avec S2 (en joule².seconde) = T(H).[moyenne temporelle de k²V1²(x)]; etc. '''Application''': la formule de Borda du pendule simple est retrouvée: En effet , les calculs montrent que UNIQ-math-27-0dd9dafd6b92a6e6-QINU On trouve aussi les formules du ressort mou , ou du ressort dur. On pourra aussi tester les développements limités des formules exactes des puits de potentiel précédents. == Conclusion et Résumé == cette leçon sur le plan de phase est un des chapitres fondamentaux de la mécanique : Selon une analyse très fine de Poincaré, la mécanique classique ne dit rien d'autre : elle affirme qu'un point matériel sur une ligne est défini par le doublet [abscisse so et vitesse vo] et l'équation différentielle du premier ordre v(t) := ds/dt = f(s,t).L'orbite dans le plan de phase [s(t) et v(t)] représente TOUT l'état du système. Deux révolutions conceptuelles viendront modifier cette affirmation : l'une , pas trop difficile est celle de la relativité restreinte(1905). l'autre , la mécanique quantique(1926) qui fera exploser cette notion d'orbite dans l'espace des phases en la remplaçant par des cheminements qui interfèrent, pour le dire vite. == Exercices == Il y a évidemment des dizaines d'exercices sur le plan de phase , c'est à dire la résolution de d²x/dt² = g(x) ou ce qui est équivalent Ec + V(x) = Eo. On peut même dire un peu plus : plus on saura décrire les solutions dans le plan de phase , et plus on aura de maîtrise des équations différentielles. En particulier, il convient de maîtriser l'équation de Liénard : === équation de Liénard === d²x/dt² = g(x) - f(dx/dt) ou v.dv/dx = g(x) -f(v). A supposer qu'il existe une orbite fermée, il apparaît que somme sur l'orbite de -f(v) doit être nulle : cela donne un critère très puissant, puisque par ailleurs les orbites ne peuvent se couper. Si de plus g(x) = -x , v ne change pas le long de la courbe (dite de Liénard (L)) x + f(v)=0 qu'il est donc intéressant de tracer (les tangentes à l'orbite y sont horizontales); mais on peut dire plus : à droite de la courbe, v² diminue, et on peut donner la règle qui mène de M au point M' voisin et donc avoir une intuition assez précise de la forme de la courbe. Montrer que cette règle est la suivante: du point M tracer l'horizontale qui coupe (L) en L (point de Liénard); soit l'abscisse H du point L : alors MM' est perpendiculaire en M à HM. On trace ainsi rapidement au compas les petits arcs tangents à la courbe. === Oscillateur à frottement solide === Appliquer la méthode de Lienard à -f(v) = -a sgn(v). ==== Solution ==== si a était nul , on trouverait x = Xo cos(t) et v = -Xo sin(t) , c'est à dire l'oscillateur de pulsation unité. S'il y a frottement a , la construction de Liénard montre immédiatement que les demi-cercles du demi-plan x >0 (resp x<0)sont centrés en A' (-a,0) (resp: A(a,0)).

le tracé au compas s'en déduit, et s'arrête quand M se trouve dans le segment A'A : l'amplitude a diminué de 2a à chaque demi-oscillation : donc l'amplitude décroît linéairement avec le temps, ce qui est manifestement différent du cas -f(v) = -v/Q (oscillateur linéairement amorti): dans ce cas, le tracé qualitatif montre une orbite autosimilaire entre un point d'intersection haut L et un point bas L': la courbe ressemble donc à un escargot qui s'enroule vers le point O , ceci si Q est assez élevé : ceci sera retrouvé, dans l'étude des oscillateurs harmoniques amortis.

Chute libre avec résistance de l'air

L'existence des parachutes (et l'expérience de ceux-ci date de bien avant Galilée) montre bien l'inanité de la loi z= 1/2.g.t². Quand un objet tombe dans l'air, outre le fait de décompter la légère poussée d'Archimède, il faut surtout "intuiter" la loi de Reynolds : celui-ci indiqua que pour une forme donnée et une texture de contact identique, alors la masse ou la densité du corps n'intervenait pas , et ce qu'il importait c'était de "fendre l'air" au mieux, pour une section apparente (on parle du maître-couple S en m²) donnée : la résistance était alors du type : -Cx.a .S.v² , avec a la masse volumique de l'air et le Cx le coefficient dit aérodynamique du corps (on a tous vu des casques de vélo!). Typiquement pour une sphère, Cx = 0.25 ; mais attention, pour une balle de golf alvéolée, il n'en va pas de même ! Idem des samares , ou des splendides fleurs de pissenlit: les regarder remplit d'émerveillement. les parachutes sont différents des parapentes , et le faucon différent de la buse.Etc. Par ailleurs la loi n'est pas rigoureuse, car si v devient très grand , il faut modifier le Cx!

Néanmoins pour faire bref nous considèrerons ici seulement l'équation :

$d^2x/dt^2 = g - k.v^2$: on appellera $g/k = Vo^2$ et la droite de Liénard sera $v= Vo$: Si le mobile part plus vite que Vo , il ralentira , jusqu'à cette valeur limite. Si le mobile part moins vite, il augmentera sa vitesse jusqu'à cette limite.

Solution

L'équation à résoudre est donc : $1/2\ d(v^2)/dx = g\ (1- v^2/Vo^2)$; Bien sûr , il apparaît naturel de mesurer x en fonction du paramère Vo^2/g , ce qui ramène à $4dX/du = 2/(1-u^2)= 1/(1+u) + 1/1-u$, dont la primitive est connue : ce qui permet de tracer l'orbite.

On peut aussi vouloir l'échelle temporelle : on résout de même :

$dV/dt' = (1-V^2)$ en ayant pris $t' = gt/Vo$: d'où $t' = 1/2\ Ln(1+V)/(1-V)$, soit $V = \tanh(t')$ et puis $X = Ln(\cosh(t'))$: bien sûr , il faut vérifier qu'au début du mouvement $v = gt$ et $x = 1/2\ .g.t^2$!

Du point de vue expérimental, tout dépendra donc de la précision voulue. Voici une méthode qui ne donne pas de mauvais résultats : changer de balle pour un même rayon ; changer l'air en gaz carbonique ou en hexafluorure de soufre dans le tube de Newton. On procède par la méthode de la dérivée discrète et on élimine le kv^2 : on recouvre ainsi une assez bonne valeur de g.

Exercice: montée puis chute

On lance la balle avec la vitesse Vo vers le haut. Elle intercepte un premier faisceau lumineux horizontal puis au retour le même : durée T2 . Un peu plus haut elle a intercepté un deuxième faisceau : durée T1. La distance entre les faisceaux est d : trouver la valeur de g

Solution

Si kv^2 est nul , la réponse est aisée : si on se place au point le plus haut , $d1= 1/2\ g\ (T1/2)^2$, idem d2 : donc $g = 8d/(T1^2-T2^2)$. Si on ne néglige plus kv^2 , il faut être prudent et écrire $-kv^2.sgn(v)$: l'équation différentielle à la montée n'est PLUS la même! C'est piègeux .

En effet , $dv/dt = -g\ (1 +k\ v^2)$ donnera en coordonnées réduites : $dV/dt' = -(1+V^2)$, V fera donc intervenir tan (t')et non plus tanh (t'). Et la formule décrite devient grossièrement fausse , car la montée et la descente ne mesurent pas des g-apparents que l'on pourrait déduire facilement.

Une question délicate est: la balle met-elle plus ou moins de temps que Vo/g à descendre? On reste pris entre deux arguments contraires : certes elle va moins vite, mais elle descend de moins que $zo = Vo^2/2g$! Je ne vois pas comment faire autrement que par le calcul.

Enfin , signalons ce résultat assez surprenant dans le cas de chute d'une sphère de masse M dans un superfluide (donc de viscosité nulle): on peut oublier le superfluide et rajouter à M , la masse du fluide soit $-a.(4/3)R.\ Pi.R^2\ .dv/dt$: ce joli résultat est dû à Greene vers 1838 : c'est un des premiers résultats de **Renormalisation** avant la lettre(cf cours Connes 2005 CdF).

- remarque : nou reviendrons plus tard sur cet exercice et la **symétrie de Corinne**.

Retour

- Mécanique , enseignée via l'Histoire des Sciences

Sources et contributeurs de l’article

Mécanique, enseignée via l'Histoire des Sciences/plan de phase *Source*: http://fr.wikibooks.org/w/index.php?oldid=169337 *Contributeurs*: Guerinsylvie, 3 modifications anonymes

Licence